



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

KONSTRUKCE VORONÉHO BUŇKY NA MAPĚ

VORONOI CELL CONSTRUCTIONS ON THE MAP

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

JAN ČERMÁK

VEDOUcí PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. JAN PAVLÍK, Ph.D.

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jan Čermák

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Konstrukce Voroného buňky na mapě

v anglickém jazyce:

Voronoi cell constructions on the map

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Studium problematiky Voroného diagramů v Euklidovském prostoru, studium sférické geometrie. Ztvárnění algoritmu pro konstrukci samostatné Voroného buňky v rovině i na sféře.

Cíle bakalářské práce:

Výstupem by měl být program fungující přímo na mapě světa (od Google), který umožňuje znázornit Voroného diagram či Voroného buňku zadanou body odpovídající reálné situaci.

Seznam odborné literatury:

Computational Geometry: Algorithms and Applications

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jan Pavlík, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 24.11.2011

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Práce se zabývá studiem Voroného buňky, jejího zapracování do Voroného diagramů a jejich konstrukcí na modelu zemského povrchu. Nejdříve jsou Voroného diagramy a jejich vlastnosti vysvětleny v rovině, je zde popsána jejich konstrukce pomocí Fortunova algoritmu, poté je vysvětlena sférická geometrie a některé vztahy pro počítání na sféře, které můžeme použít při určování vzdáleností na Zemi, kterou aproximujeme koulí. Nakonec se Fortunův algoritmus aplikuje na sféru, jsou zde vysvětleny principy konstrukce Voroného diagramu tímto algoritmem na sféře a změny oproti rovinnému případu, se kterými se musí počítat. Cílem práce je zobrazit Voroného diagram na Google mapách, pracujeme tedy s rozhraním Google Maps API.

ABSTRACT

This bachelor's thesis deals with study of Voronoi cell and its representation in Voronoi diagrams and their construction on the model of Earth's surface. At first, Voronoi diagrams and their characteristics are explained in a plane, we describe their construction using Fortune's algorithm, then spherical geometry is explained. Then we take a look at some equations that are useful for calculating on a sphere, and we use them for calculating distances on Earth, which we approximate with a sphere. Finally we apply Fortune's algorithm on a sphere, we explain the principles of construction of Voronoi diagrams with this algorithm on a sphere and changes compared to the planar case that must be taken care of. The goal of the thesis is to display Voronoi diagram on Google maps, thus we work with Google Maps API.

KLÍČOVÁ SLOVA

Voroného buňka, Voroného diagram, Fortunův algoritmus, sféra, Google Maps

KEY WORDS

Voronoi cell, Voronoi diagram, Fortune's algorithm, sphere, Google Maps

ČERMÁK, J. *Konstrukce Voroného buňky na mapě*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 37 s. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Jan Pavlík, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Konstrukce Voroného buňky na mapě vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Jana Pavlíka, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jan Čermák

Na tomto místě bych rád poděkoval všem těm, kteří mi pomáhali s bakalářskou prací, především vedoucímu mé práce Mgr. Janu Pavlíkovi, Ph.D, také Mgr. Vítu Pászto a Ondřeji Růžičkovi, kteří mi ukázali, jak se pracuje s Google Maps API na mé stáži v rámci projektu AMathNet v Olomouci. Dále bych poděkoval Tomáši Kadlcovi a Martinu Krupovi za pomoc s programováním. Také bych poděkoval mým spolužákům na vysoké škole. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za podporu.

Jan Čermák

OBSAH

Úvod.....	8
KAPITOLA 1	
Voroného diagram v rovině	9
1.1 Historie.....	9
1.2 Definice a základní vlastnosti	9
1.3 Konstrukce Voroného diagramu	13
1.3.1 Fortunův algoritmus.....	13
KAPITOLA 2	
Sférická geometrie	18
2.1 Kulová plocha	18
2.2 Hlavní a vedlejší kružnice.....	18
2.3 Vztah pravoúhlých a sférických souřadnic	18
2.4 Řešení sférického trojúhelníku	19
2.5 Zeměpisné souřadnice.....	21
2.6 Stanovení vzdáleností na Zemi	22
KAPITOLA 3	
Voroného diagram na sféře.....	23
3.1 Definice a základní vlastnosti	23
3.2 Konstrukce Voroného diagramu	25
3.2.1 Fortunův algoritmus.....	25
3.2.2 Paraboly na sféře.....	27
3.2.3 Datové struktury	31
3.2.4 Algoritmus	31
3.2.5 Problémové případy	33
KAPITOLA 4	
Google Maps API	34
ZÁVĚR.....	35
LITERATURA	36

ÚVOD

Na začátek bych rád přiblížil některé aplikace Voroného diagramu, k čemu se dá využívat a co nás vede k jeho studiu.

Jako jednu z motivací zde uvedu tzv. *Poštovní problém*. Představte si, že jste ve vedení řetězce pošt a plánujete v určité lokalitě otevřít novou pobočku. (Dnes už pošty nemají takovou důležitost jako dříve, vhodnější by tedy dnes byl např. termín řetězec supermarketů.) Dříve, než se začne se samotnou stavbou, je potřeba předpovědět, nakolik bude nová pobočka úspěšná, tzn. kolik přiláká zákazníků. Za tímto účelem si musíme dokázat namodelovat chování zákazníků: Jak se lidé rozhodují, odkud budou posílat svoje dopisy? Náš problém zní takto: Máme množinu bodů – řekněme jim střediska – které poskytují určité zboží nebo služby. Pro každé středisko hledáme oblast, kde bydlí lidé, kteří si do něj dané zboží chodí obstarávat. Zde si uvedeme zjednodušující předpoklady:

- Cena určitého zboží je ve všech střediscích stejná.
- Cena zboží sestává z ceny samotného zboží a z ceny dopravy do střediska.
- Cena dopravy do střediska se vypočte jako euklidovská vzdálenost ke středisku krát pevná cena za jednotku vzdálenosti.
- Zákazníci se snaží minimalizovat svoje náklady na získání určitého zboží.

Tyto předpoklady nejsou samozřejmě vždy splněny, ceny zboží se liší středisko od střediska a délka cesty ke středisku také není jen euklidovská vzdálenost k němu, ale dávají nám alespoň hrubou představu o oblastech, odkud lidé navštěvují dané středisko. (Lepší splnění předpokladů nám např. dává model, kdy máme množinu vysílačů pro mobilní telefony ve městě, a mobilní telefon se vždy připojuje k nejbližšímu vysílači.)

My se budeme zajímat o geometrickou interpretaci výše zmíněného modelu. Ten indukuje rozdělení oblasti na *regiony* – oblasti zájmu. Lidé, kteří bydlí ve stejném regionu, využívají služeb stejného střediska. Z uvedených předpokladů vyplývá, že lidé vždy využívají služeb nejbližšího střediska, což se poměrně dobře blíží realitě. To znamená, že oblast zájmu pro dané středisko sestává z bodů, které jsou blíže k tomuto středisku, než k některému dalšímu.

Dělení vzniklé tímto modelem, kde každý bod oblasti je přiřazen nejbližšímu středisku, se nazývá *Voroného diagram* pro množinu bodů. Na jeho základě můžeme získat spoustu informací o oblastech zájmu daných středisek. Např. regiony se společnou hranicí spolu budou pravděpodobně soupeřit o zákazníky, kteří žijí v hraniční oblasti, atd.

Zde jsme si popsali aplikaci Voroného diagramu v sociální geografii. Tato struktura se používá ale také ve fyzice, astronomii, robotice, atd. V této práci se zaměříme na základní vlastnosti Voroného diagramu, jeho konstrukci pro danou množinu bodů pro jednoduchost nejprve v rovině, a dále se pokusíme implementovat algoritmus pro konstrukci Voroného diagramu na zemský povrch (sféru), který naprogramujeme, aby fungoval v mapách od společnosti Google.

KAPITOLA 1

VORONÉHO DIAGRAM V ROVINĚ

V této kapitole bude uvedeno nejprve něco z historie Voroného diagramu, poté jeho definice, jeho základní vlastnosti a některé algoritmy pro jeho konstrukci. Speciálně Fortunův algoritmus bude vysvětlen podrobněji. Obrázky v následující kapitole jsou převzaty z [14].

1.1 HISTORIE

První zmínku o Voroného diagramech můžeme najít už v roce 1644, kdy s jejich pomocí René Descartes ve své práci *Principy filozofie* ukazoval uspořádání hmoty ve sluneční soustavě a jejím okolí. Německý matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet se přímo zabýval Voroného diagramy, používal je ve svých studiích kvadratických forem v roce 1850. Proto se někdy také můžeme setkat s názvem *Dirichletovy mozaiky*. V roce 1854 je použil i britský fyzik John Snow v době, kdy v londýnské čtvrti Soho vypukla cholera. Zjistil, že nákaza pochází z kontaminované vody, pro kterou lidé chodili na Broad Street. K tomu mu pomohlo vykreslení Voroného buněk pro vodní pumpy v okolí nákazy. Naprostá většina nakažených lidí žila v podoblasti příslušné právě k pumpě na Broad Street.

Svůj název získaly Voroného diagramy po ruském matematikovi Georgij Feodosjevič Voroném, který je v roce 1908 definoval a zkoumal jejich *zobecněný n -rozměrný případ*. Voroného diagramy, které se používají v geofyzice a meteorologii k analýze prostorově rozložených dat (měření srážek, vlhkosti) se nazývají *Thiessenovy polygony* po americkém meteorologovi Alfrédu H. Thiessenovi.

V matematice jsou Voroného diagramy speciálním případem rozdělení daného prostoru (např. metrického) určeného vzdálenostmi od konkrétní množiny bodů v prostoru.

1.2 DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Nejprve si definujme euklidovskou vzdálenost mezi dvěma body p a q jako $d(p, q)$. V rovině tedy máme

$$d(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}. \quad (1)$$

Nechť $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ je množina n různých bodů v rovině. Tyto body budeme nazývat *generující body*.

Voroného diagram pro množinu P definujeme jako rozdělení roviny na n buněk, jednu pro každý bod p_i z P , s vlastností, že bod q leží v buňce odpovídající generujícímu bodu p_i tehdy a jen tehdy, když

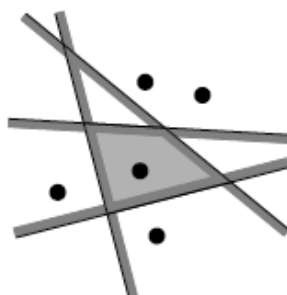
$$d(q, p_i) < d(q, p_j), \quad (2)$$

pro všechna $p_j \in P, j \neq i$.

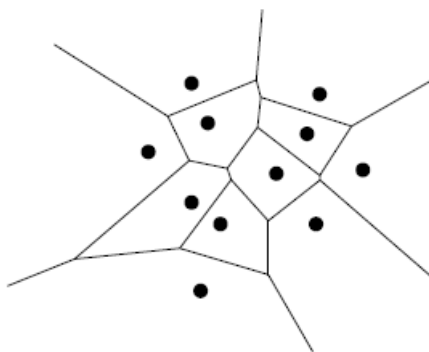
Voroného diagram pro množinu P budeme značit $Vor(P)$. Buňku Voroného diagramu odpovídající generujícímu bodu p_i značíme $V(p_i)$ a nazýváme Voroného buňka bodu p_i . Můžeme ji také chápat jako oblast významu bodu p_i . $V(p_i)$ tedy obsahuje všechny body roviny, které jsou blíže generujícímu bodu p_i , než každému dalšímu generujícímu bodu.

Bod q je *Voroného vrcholem* mezi buňkami určenými body p_i, p_j a p_k , jestliže body p_i, p_j a p_k leží na jedné kružnici se středem v bodě q .

Voroného hrana mezi buňkami určenými body p_i a p_j je množina bodů q , které mají stejnou vzdálenost od bodů p_i a p_j . Ty jsou zároveň jejich nejbližšími generujícími body.



Obr. 1: Voroného buňka



Obr. 2: Voroného diagram pro množinu bodů

Podívejme se blíže na strukturu Voroného buňky. Pro dva body p a q v rovině definujeme *bisektor* bodů p a q jako osu úsečky \overline{pq} . Pro všechny body r bisektoru platí:

$$d(r, p) = d(r, q). \quad (3)$$

Tento bisektor rozděluje rovinu na dvě poloroviny. Otevřenou polorovinu obsahující bod p budeme značit $h(p, q)$, otevřenou polorovinu obsahující bod q $h(q, p)$. Pro všechny body r poloroviny $h(p, q)$ platí:

$$d(r, p) < d(r, q), \quad (4)$$

z čehož nám plyne následující poznatek:

$$V(p_i) = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} h(p_i, p_j). \quad (5)$$

$V(p_i)$ je tedy průnik $n - 1$ polorovin, a navíc, otevřený konvexní polygon ohraničený nanejvýš $n - 1$ vrcholy a nanejvýš $n - 1$ hranami. Každá buňka Voroného diagramu je tedy tvořena průnikem několika polorovin, takže Voroného diagram je rozdělení roviny s příkými hranami. Některé hrany jsou úsečky, některé polopřímky. Jestliže všechny generující body nejsou kolineární (neleží na přímce), ve Voroného diagramu nebudou žádné přímky.

Můžeme vyslovit následující tvrzení: Buď P množina n generujících bodů v rovině. Jestliže jsou všechny generující body kolineární, Voroného diagram se skládá z $n - 1$ rovnoběžných přímek. V ostatních případech se Voroného diagram skládá z úseček a polopřímek.

Složitost Voroného diagramu: Pro $n \geq 3$ generujících bodů v rovině obsahuje Voroného diagram maximálně $2n - 5$ vrcholů a maximálně $3n - 6$ hran.

Toto tvrzení si dokážeme. Jestliže jsou generující body kolineární, tak pro ně toto tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že generující body nejsou kolineární. Označme si

- v : počet vrcholů diagramu
- e : počet hran diagramu
- n : počet oblastí (stěn) diagramu = počet generujících bodů

Z Eulerovy formule víme, že pro každý souvislý rovinný graf platí, že

$$v - e + n = 2 \quad (6)$$

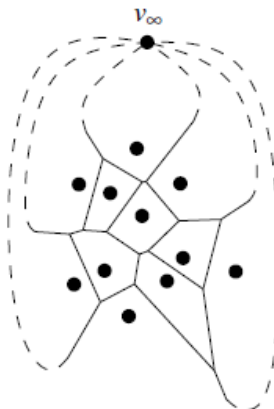
Jelikož Voroného diagram obsahuje nekončící hrany, vytvoříme vrchol v_∞ v nekonečnu a tyto hrany s ním spojíme. Po přidání jednoho vrcholu máme tedy rovinný graf, pro který platí:

$$(v + 1) - e + n = 2 \quad (7)$$

U Voroného diagramu navíc víme, že každý jeho vrchol (včetně v_∞) má stupeň alespoň 3. Každá hrana je mezi dvěma vrcholy, platí tedy

$$3(v + 1) \leq 2e \quad (8)$$

Po vyjádření počtu vrcholů, resp. hran z Eulerovy formule pro Voroného diagram, dosazení do (8) a jednoduché algebraické úpravě dostaneme původní tvrzení. \square



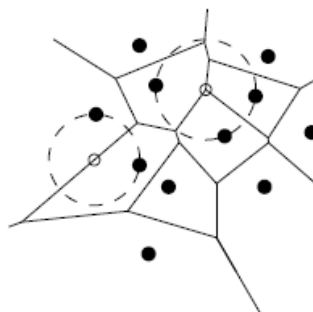
Obr. 3: Znázornění vrcholu v_∞

Nyní se zaměříme na hrany a vrcholy Voroného diagramu. Víme, že jeho hrany jsou části bisektorů dvojic generujících bodů a že vrcholy jsou průniky těchto bisektorů. Avšak ne všechny bisektory jsou hranami Voroného diagramu a ne všechny jejich průniky jsou jeho vrcholy. Pro lepší představu o bisektorech a jejich průnicích, které jsou součástí Voroného diagramu vyslovíme následující definici:

Pro bod q definujeme *největší prázdný kruh* příslušný bodu q vzhledem k P , označený $C_P(q)$, jako největší kruh se středem v bodě q , který neobsahuje ve svém vnitřku žádný z generujících bodů množiny P . Následující tvrzení charakterizuje hrany a vrcholy Voroného diagramu:

Pro Voroného diagram $Vor(P)$ množiny bodů P platí následující:

- Bod q je vrchol Voroného diagramu $Vor(P)$ tehdy a jen tehdy, když jeho největší prázdný kruh $C_P(q)$ obsahuje na své hranici 3 nebo více generujících bodů z množiny P .
- Bisektor mezi generujícími body p_i a p_j definuje hranu Voroného diagramu $Vor(P)$ tehdy a jen tehdy, když na bisektoru existuje bod q takový, že $C_P(q)$ obsahuje na své hranici body p_i a p_j , ale žádné jiné.



Obr. 4: Znázornění předchozího tvrzení

1.3 KONSTRUKCE VORONÉHO DIAGRAMU

V předchozí kapitole jsme se zabývali strukturou Voroného diagramu, teď se zaměříme na jeho konstrukci. Budeme se tedy zajímat o algoritmy, které Voroného diagram dokážou zkonstruovat. Abychom mohli tyto algoritmy porovnávat, musíme zjistit, nakolik jsou efektivní. Efektivita algoritmu je popsána jeho časovou a paměťovou asymptotickou složitostí. *Asymptotická složitost* algoritmu vyjadřuje, jakým způsobem se bude chování algoritmu měnit v závislosti na množství nebo velikosti vstupních dat. Zapisuje se pomocí Omikron notace jako $O(f(n))$, kde n je veličina popisující velikost vstupních dat. Užitý zápis označuje, že náročnost algoritmu je menší než $a + b \cdot f(n)$, kde a, b jsou vhodně zvolené konstanty a n je veličina popisující velikost vstupních dat. Zanedbáváme tedy multiplikativní i aditivní konstanty. Zajímá nás jen chování funkce pro velká n . Pro úplnost uvedeme formální definici asymptotické složitosti:

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce definované na nějaké podmnožině reálných čísel. Potom řekneme, že

$$f(x) \in O(g(x)) \quad (9)$$

právě tehdy, když

$$\exists C, x_0 \in \mathbb{R}, C > 0: \forall x > x_0 \text{ je } |f(x)| \leq |C \cdot g(x)|. \quad (10)$$

K nalezení optimálního algoritmu je třeba určit nejmenší možnou asymptotickou složitost algoritmu. Uvažujme situaci, kdy leží všechny body množiny P na přímce. Voroného diagram pro tyto body je tvořen $n - 1$ rovnoběžnými přímkami. Vytvořit Voroného diagram je v tomto případě totéž jako najít pořadí bodů množiny P na přímce. K tomu je potřeba čas $O(n \cdot \log n)$. Nejmenší možná asymptotická složitost algoritmu pro konstrukci Voroného diagramu je tedy rovna $O(n \cdot \log n)$.

Podívejme se tedy na algoritmy pro konstrukci Voroného diagramu. Řekli jsme, že Voroného buňka $V(p_i)$ vznikne průnikem polorovin $h(p_i, p_j)$, $j \neq i$. Mohli bychom tedy tímto postupem konstruovat postupně Voroného buňky pro všechny generující body z P , nakonec by nám vznikl kompletní Voroného diagram. Tomuto algoritmu se říká *naivní algoritmus*. Je jednoduchý, ale výpočtově poměrně časově náročný. Nalezení jedné buňky vyžaduje čas $O(n \cdot \log n)$ a počet buněk je n , celková časová náročnost je tedy $O(n^2 \cdot \log n)$.

Existuje více algoritmů, které dokážou zkonstruovat Voroného diagram efektivněji, než naivní algoritmus. Jsou to např. *přírůstkový algoritmus*, algoritmus „*rozděl a panuj*“, *metoda zdvihu*, *Fortunův algoritmus*. V dalším se budeme pro jeho efektivitu zabývat *Fortunovým algoritmem*. Jeho časová náročnost je totiž $O(n \cdot \log n)$, viz [14], což je nejmenší možná asymptotická složitost algoritmu pro výpočet $Vor(P)$. Je tedy optimálním algoritmem pro náš výpočet. Vysvětlíme si podrobně jeho princip a postup.

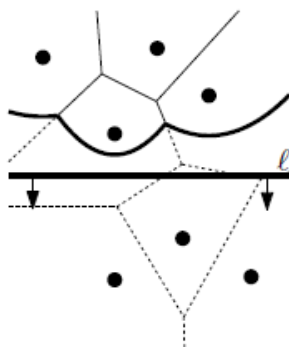
1.3.1 Fortunův algoritmus

Tento algoritmus dostal jméno po svém vynálezci – Stevenu Fortunovi, který ho v roce 1986 publikoval ve své práci „*A sweepline algorithm for Voronoi diagrams*“.

Fortunův algoritmus je založen na metodě *zametací přímky* – je to vodorovná přímka, která se postupně pohybuje ve směru osy y směrem k $-\infty$ a jakoby „zametá“ naši rovinu.

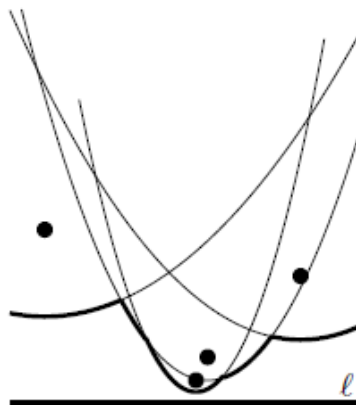
V průběhu procesu si uchovává informaci ohledně struktury, kterou konstruuje, přesněji, o průnicích zametací přímky s naší strukturou. Body pod zametací přímku totiž neovlivňují strukturu nad ní. Během „zametání“ roviny se informace mění jen ve speciálních bodech – bodech s výskytem *speciální události*. Tyto události rozebereme později.

Tenhle obecný postup metody zametací přímky aplikujeme na konstrukci Voroného diagramu množiny $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ generujících bodů v rovině. Zametací přímku l pohybujeme od shora dolů přes rovinu. Dále si máme uchovávat informace o průnicích zametací přímky s Voroného diagramem. Toto ale zde není možné, protože část Voroného diagramu nad zametací přímku ovlivňují také generující body ležící pod ní. Když totiž zametací přímka dosáhne nejvyššího vrcholu Voroného buňky $V(p_i)$, odpovídající generující bod p_i ještě nebyl nalezen. Nemáme tedy všechny potřebné informace, abychom mohli tento vrchol sestrojít. Postup lehce pozměníme. Namísto uchovávání průniků Voroného diagramu se zametací přímku si budeme uchovávat informace o části Voroného diagramu určeného generujícími body ležícími nad zametací přímku, která už nemůže být ovlivněna generujícími body pod ní.



Obr. 5: Část Voroného diagramu nad zametací přímku ovlivňují i body pod ní

Označme polorovinu nad zametací přímku l symbolem l^+ . Jaká část Voroného diagramu nad l už nemůže být ovlivněna generujícími body pod ní? Jinak, pro které body $q \in l^+$ už určitě víme, jaký je jejich nejbližší generující bod? Vzdálenost bodu $q \in l^+$ k jakémukoliv generujícímu bodu pod l je větší, než k l . Takže nejbližší generující bod k bodu q nemůže ležet pod l , pokud vzdálenost bodu q k nějakému generujícímu bodu $p_i \in l^+$ je menší nebo rovna, než vzdálenost q k l . Geometrické místo bodů, které jsou blíže ke generujícímu bodu $p_i \in l^+$, než k l , je ohraničeno parabolou (bisektor přímky a bodu je parabola). To znamená, že geometrické místo bodů, které jsou blíže ke kterémukoliv generujícímu bodu nad l než k l samotné je ohraničeno parabolickými oblouky. Tuto posloupnost parabolických oblouků budeme nazývat *příbojová vlna*. Můžeme si ji představit také takto: Každý generující bod p_i nad zametací přímku určuje kompletní parabolu β_i . (Bod p_i je ohnisko paraboly β_i .) Příbojová vlna je křivka, která v každé x -ové souřadnici prochází nejnižším bodem ze všech parabol.



Obr. 6: Příbojová vlna

Příbojová vlna je x -monotónní, každá svislá přímka ji protíná v právě jednom bodě. Všimněme si, že průsečíky různých parabolických oblouků na příbojové vlně leží na hranách Voroného diagramu. Průsečík dvou parabolických oblouků β_i a β_j je totiž stejně vzdálen od dvou generujících bodů, p_i a p_j . Prochází jím tudíž hrana Voroného diagramu. Tyto průsečíky tedy postupně s pohybem zametací přímky směrem dolů určují hrany diagramu.

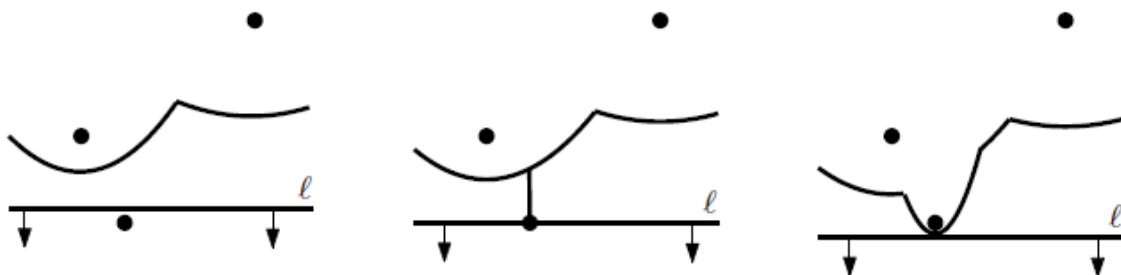
Místo uchovávání průsečíků Voroného diagramu se zametací přímkou tedy uchováváme příbojovou vlnu určenou pozicí zametací přímky. Jelikož se ale příbojová vlna při každém posunutí zametací přímky mění, neuchováváme ji explicitně. Před tím, než si řekneme, jak ji budeme uchovávat, si vysvětlíme, kde a jak se mění její struktura. Tyto situace nastávají, když se na příbojové vlně objeví nový parabolický oblouk (*bodová událost*) a když se parabolický oblouk scvrkne do bodu a z příbojové vlny zmizí (*kruhová událost*).

Nejprve se podíváme na situaci, kdy se na příbojové vlně objeví nový parabolický oblouk. Stane se tak vždy, když zametací přímka narazí na nový generující bod. Parabola určená tímto bodem je nejprve degenerovaná s nulovou šířkou – svislá úsečka spojující zmíněný generující bod s příbojovou vlnou. S postupem zametací přímky níže se parabola rozšiřuje. Část nové paraboly, která je níž než bývalá příbojová vlna, je nyní část nové příbojové vlny. Tuto událost budeme nazývat *bodová událost*.

Jak jsme zmínili dříve, průsečíky částí parabol na příbojové vlně určují hrany Voroného diagramu. Při bodové události se objeví dva nové průsečíky, které začnou tvořit hrany. Nejdřív jsou tyto dva průsečíky samozřejmě totožné, poté se pohybují v opačném směru a určují stejnou hranu. Ta ale není hned spojena se zbytkem Voroného diagramu nad zametací přímkou. Později tahle zvětšující se hrana narazí na jinou a tak se propojí se zbytkem diagramu. Kdy toto nastane, si vysvětlíme za chvíli.

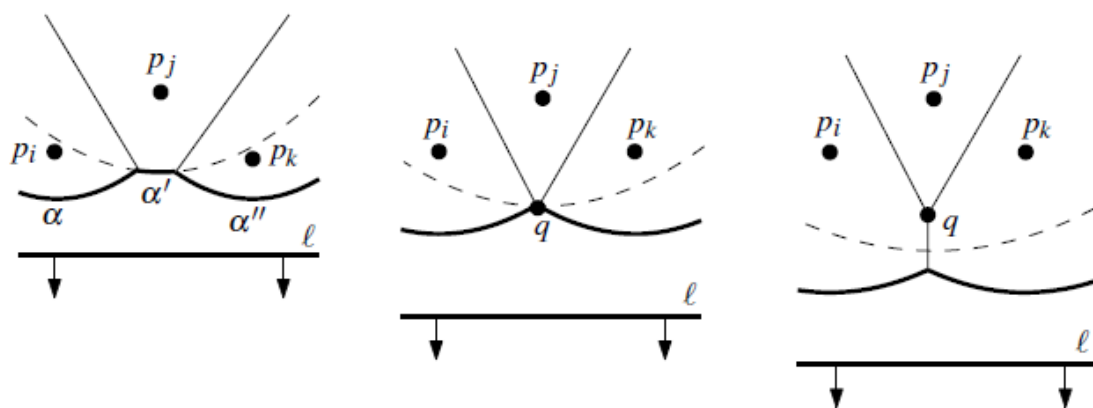
Když nastane bodová událost, objeví se tedy na příbojové vlně nový parabolický oblouk a začne se nám rýsovat nová hrana Voroného diagramu. Nový parabolický oblouk se na příbojové vlně objeví jediné při bodové události, žádná jiná možnost není. Důkaz tohoto tvrzení najdeme v [14].

Z toho ihned plyne, že příbojová vlna se skládá z nanejvýš $2n - 1$ parabolických oblouků. Při nalezení každého generujícího bodu se vytvoří nový parabolický oblouk, který rozděluje nanejvýš jeden stávající oblouk na dva nové a neexistuje žádný jiný způsob, jak by se mohl nový parabolický oblouk objevit na příbojové vlně.



Obr. 7: Bodová událost

Druhý typ události v tomto algoritmu nastává, když se parabolický oblouk smrskne do bodu a zmizí. Buď α' mizející parabolický oblouk, α a α'' dva sousedící parabolické oblouky k α' před tím, než zmizí. Oblouky α a α'' nemohou být součástí stejné paraboly. Důkaz můžeme opět najít v [14]. To znamená, že tři parabolické oblouky α , α' a α'' přísluší ke třem navzájem různým generujícím bodům p_i , p_j a p_k . Ve chvíli, kdy oblouk α' zmizí, všechny tři paraboly určené těmito generujícími body prochází skrz stejný bod q . Ten je stejně vzdálený od zametací přímky l , jako od všech tří generujících bodů. Takže body p_i , p_j a p_k prochází kružnice se středem v bodě q , jejíž nejnižší bod leží na l . Uvnitř této kružnice nemůže být žádný jiný generující bod: takový bod by byl blíže k bodu q , než je q k l , což by bylo v rozporu s tím, že q leží na příbojové vlně. Z toho vyplývá, že bod q je vrcholem Voroného diagramu. Dříve jsme řekli, že průsečíky parabol na příbojové vlně určují hrany diagramu. Takže když zmizí parabolický oblouk z příbojové vlny, a dva průsečíky se setkají v jednom bodě, dvě hrany Voroného diagramu se v něm také setkají a vznikne *vrchol* Voroného diagramu. Tuto událost budeme nazývat *kruhovou událostí*, protože při ní zametací přímka dosáhne nejnižšího bodu kružnice, na které leží tři generující body, které určují tři sousedící parabolické oblouky. Z předchozích faktů vyvodíme následující větu: Parabolický oblouk může zmizet z příbojové vlny jedině, když nastane kruhová událost. Důkaz opět najdeme v [14].



Obr. 8: Kruhová událost

Nyní jsme si popsali, jak se mění struktura příbojové vlny: při bodové události se objeví nový parabolický oblouk, a při kruhové události dosavadní parabolický oblouk zmizí. Také víme, jak události souvisí s konstrukcí Voroného diagramu: při bodové události se začne

prodlužovat nová hrana, při kruhové události se dvě hrany střetnou v bodě, kde vznikne nový vrchol. Protože se při Fortunově algoritmu struktura příbojové vlny mění jen v těchto dvou případech, můžeme ignorovat všechny přechodné pozice. V algoritmu tedy „skáčeme“ z jedné události na druhou. Informaci popisující parabolické oblouky na příbojové vlně si tedy nikdy nemusíme pamatovat. Je vhodná jen pro vysvětlení algoritmu.

Fortunův algoritmus jsme si tedy vysvětlili na jednodušším případě, v rovině, naším cílem je ale implementovat ho na mapu Země. Skutečný zemský povrch je v důsledku dlouhého vývoje naší planety velmi členitý, jak ve vertikálním, tak i v horizontálním směru. Horizontálně je zemský povrch členěn na kontinenty (29,2 %) a oceány (70,8 %). Toto nerovnoměrné rozložení pevnin a oceánů má výrazný vliv na fyzickogeografické podmínky. Průměrná výška pevniny je 875 m, průměrná hloubka oceánů dosahuje 3704 m. Zemský povrch také podléhá neustálým změnám (např. eroze). Proto je prakticky nemožné na takto složité ploše vyjádřit stálou, přesnou polohu zvoleného bodu. Proto musíme tvar Země *idealizovat* a jeho plochu přesně analyticky vyjádřit. Zemské těleso můžeme nahradit geoidem, rotačním elipsoidem, trojosým elipsoidem a koulí. Nejčastěji je Země aproximována vhodným rotačním elipsoidem, pro zjednodušení ale budeme Zemi aproximovat *koulí*.

Nejprve si tedy řekneme něco o *sférické geometrii*, uvedeme základní vztahy pro počítání na sféře a poté budeme zkoumat, jak na ní vypadá Voroného diagram pro množinu bodů a jaké změny je potřeba provést pro implementaci Fortunova algoritmu.

KAPITOLA 2

SFÉRICKÁ GEOMETRIE

V této kapitole zavedeme základní pojmy, pomocí nichž budeme moci pochopit a dále studovat objekty na kulové ploše (sféře). Pro upřesnění je třeba uvést, že v této kapitole budeme, na rozdíl od předchozí kapitoly, značit body tradičně velkými tiskacími písmeny. V předchozí kapitole jsme pro jejich značení používali malá písmena z toho důvodu, že velkým písmenem jsme označovali množinu bodů. Ve třetí kapitole se k předchozímu značení opět vrátíme.

2.1 KULOVÁ PLOCHA

Kulovou plochou nazýváme množinu všech bodů prostoru \mathbb{R}^3 , jejíž každý bod X má od pevně zvoleného bodu O , středu kulové plochy, konstantní vzdálenost $|OX| = r > 0$ (*poloměr*). Kulové ploše o poloměru $r = 1$ říkáme *jednotková kulová plocha*.

2.2 HLAVNÍ A VEDLEJŠÍ KRUŽNICE

Nechť jsou dány dva libovolné body A, B na kulové ploše a bod O střed kulové plochy. Rovina proložená body A, B a středem O protíná kulovou plochu v kružnici k , která se nazývá *hlavní kružnice*. Všechny ostatní kružnice na kulové ploše vzniklé řezem roviny, která neprochází středem O , se nazývají *vedlejší kružnice*. U jednotkové kulové plochy je poloměr hlavní kružnice roven 1, poloměry všech vedlejších kružnic jsou menší než 1.

K měření délek na kulové ploše využijeme obloukové míry. Velikost úhlu α vyjádříme v obloukové míře jako délku oblouku l , který je vytat rameny úhlu α na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu. Jak každý ví, radián je úhel ρ , jehož oblouková míra je rovna 1. Ve stupňové míře je jeho velikost

$$\rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57^\circ 17'. \quad (11)$$

2.3 VZTAH PRAVOÚHLÝCH A SFÉRICKÝCH SOUŘADNIC

Pro určení polohy tělesa v prostoru je nutné zavést *souřadnicovou soustavu*. U každé prostorové souřadnicové soustavy musí být definována *základní rovina* procházející počátkem souřadnicové soustavy a *základní směr*. Mezi nejčastěji používané patří *pravoúhlá soustava souřadnic*. V ní je definována základní rovina ρ , ve které leží počátek soustavy souřadnic O a souřadnicové osy x a y , které jsou na sebe vzájemně kolmé. Kolmo k rovině ρ , procházející počátkem soustavy O , je třetí osa z . V této soustavě je pak poloha libovolného bodu jednoznačně určena třemi souřadnicemi x, y, z . Říká se jí *kartézská soustava souřadnic*.

Vzhledem k tomu, že budeme pracovat s body na zemském povrchu aproximovaném sférou, jsou pro určení polohy bodů v prostoru výhodnější souřadnice na kouli, čili *sférické*.

Při odvození polohy bodu lze pak opět vyjít ze základní roviny $\rho \equiv (x, y)$ a ze základního směru – směru kladné poloosy x . Nyní bude poloha bodu jednoznačně určena délkou průvodiče r a velikostí úhlů θ a φ , kde délku průvodiče r definujeme jako délku vektoru, jehož počáteční bod je počátek soustavy souřadnic a koncový bod poloha daného bodu. Úhel φ reprezentuje úhel mezi průvodičem r a základní rovinou ρ , úhel θ představuje úhel mezi průvodičem r sklopeným do základní roviny a osou x . Mezi pravoúhlou a sférickou souřadnicovou soustavou existují následující převodní vztahy:

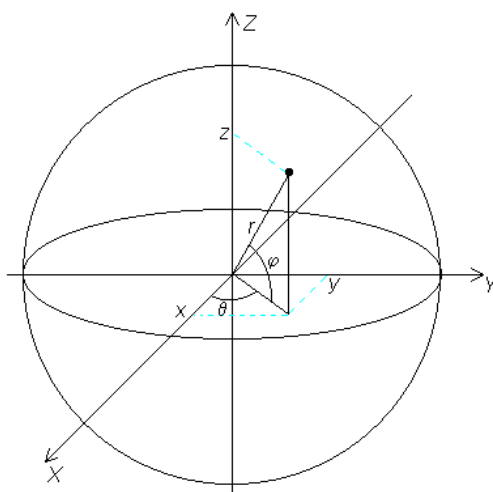
$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \theta, \\y &= r \cos \varphi \sin \theta, \\z &= r \sin \varphi,\end{aligned}\tag{12}$$

kde

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)},$$

a naopak

$$\begin{aligned}\varphi &= \arccos \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \theta &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\end{aligned}\tag{13}$$



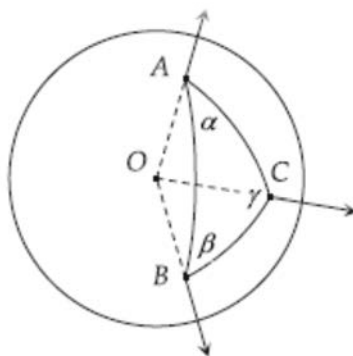
Obr. 9: Sfěrické souřadnice

2.4 ŘEŠENÍ SFÉRICKÉHO TROJÚHELNÍKU

Necht' A, B, C jsou body na povrchu koule, které neleží na jedné hlavní kružnici. Vždy dvěma z nich (AB, AC, BC) můžeme vést tři různé hlavní kružnice k_1, k_2, k_3 , které určují na povrchu koule tzv. *sférický trojúhelník*. K řešení problémů, které používají výpočet na sféře, jsou potřeba výpočty a odvození vycházející ze sférického trojúhelníku. Některé si zde uvedeme.

Strany sférického trojúhelníku nejsou úsečky, ale oblouky hlavních kružnic k_1 , k_2 a k_3 , jejichž středy leží ve středu koule O . Jedná se v podstatě o *trojhran* s vrcholy O , A , B , C . Můžeme v něm rozlišovat úhly dvojího druhu:

- úhly sevřené hranami ($\sphericalangle BOC = a$, $\sphericalangle COA = b$, $\sphericalangle AOB = c$), které nazýváme *strany sférického trojúhelníku*,
- úhly sevřené rovinami ($\sphericalangle (AOC, AOB) = \alpha$, $\sphericalangle (BOA, BOC) = \beta$, $\sphericalangle (COB, COA) = \gamma$), které nazýváme *úhly sférického trojúhelníku*.



Obr. 10: Sférický trojúhelník

Pro součet úhlů sférického trojúhelníku platí:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon, \quad (14)$$

kde ε je *exces sférického trojúhelníku*, je to rozdíl mezi součtem všech úhlů sférického trojúhelníku a úhlem přímým.

Řešením sférického trojúhelníku dostáváme řadu rovnic, které charakterizují vztahy mezi jeho jednotlivými prvky. Pro sférický trojúhelník platí:

a) *Věta sinová*:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}. \quad (15)$$

b) *Věta kosinová*:

Pro strany sférického trojúhelníku:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Pro úhly sférického trojúhelníku:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b,$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c. \quad (16)$$

c) *Věta sinus-kosinová*

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha,$$

A dále cyklickou záměnou proměnných lze dostat dalších 5 rovnic, nebo

$$\sin \alpha \cos c = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha, \quad (17)$$

což lze také rozepsat do systému rovnic.

d) *Věta tangentová pro poloviční úhel:*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\left(\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)} \right)}, \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\left(\frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)} \right)}, \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\left(\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)} \right)}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{Kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

2.5 ZEMĚPISNÉ SOUŘADNICE

Osa zemské rotace protíná zemskou kouli ve dvou bodech. Jedním je *severní pól*, druhým *jižní pól*. Průsečnice roviny, proložené středem zeměkoule O kolmo na osu rotace se zemskou koulí, je *zemský rovník*. Jestliže určíme na rovníku nějaký bod B , můžeme charakterizovat polohu libovolného bodu na zemském povrchu pomocí sférických souřadnic. Ztotožníme-li rovinu rovníku s rovinou $\rho \equiv (x, y)$ a určíme-li základní směr od středu Země O do bodu B , lze polohu bodu A na Zemi vyjádřit sférickými souřadnicemi r_Z , φ_A a θ_A . První souřadnice bodu A je rovna délce *zemského poloměru* r_Z . Druhou souřadnici φ_A nazveme *zeměpisná šířka* bodu A a třetí souřadnici θ_A nazveme jeho *zeměpisná délka*.

Přímka proložená body O a A je normálou ke kulové ploše v bodě A , lze tedy zeměpisnou šířku místa obecně definovat jako úhel φ , který svírá normála daného bodu s rovinou rovníku. Zeměpisná šířka se udává v hodnotách od 0° do $+90^\circ$ (v obloukové míře od 0 do $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$) na sever od rovníku jako *severní zeměpisná šířka* (s. š.) a od 0° do -90° (od 0 do $-\frac{\pi}{2} \text{ rad}$) na jih od rovníku jako *jižní zeměpisná šířka* (j. š.). Rovina proložená bodem A rovnoběžně s rovinou rovníku protíná sféru v kružnici, kterou nazýváme *rovnoběžka*. Je to množina všech bodů, které mají stejnou hodnotu φ . Rovník je nejdelší rovnoběžkou. S rostoucí absolutní hodnotou zeměpisné šířky se délka rovnoběžky zkracuje od nejdelšího rovníku do nuly na pólu.

Zeměpisná délka bodu na Zemi je úhel θ , který svírá rovina poledníku daného místa s rovinou základního (nultého) poledníku. Poledník je průsečnice roviny proložené osou zemské rotace s kulovou plochou. Na rozdíl od zeměpisné šířky, kde je základem jejího určení rovník, nejdelší rovnoběžka, nelze základní poledník určit přirozeným způsobem, všechny poledníky jsou na kouli totiž stejně dlouhé. V minulosti byl proto základní poledník

kladen do různých míst (Rhodos, Gibraltar, Kanárské ostrovy, ...). V současnosti je za základní poledník na základě rozhodnutí z pařížské konference z r. 1911 kladen poledník procházející *greenwichskou observatoří* v Londýně. Zeměpisná délka se udává v hodnotách od 0° do $+180^\circ$ (od 0 do π rad) na východ od greenwichského poledníku jako *východní zeměpisná délka* (v. d.) a od 0° do -180° (od 0 do $-\pi$ rad) na západ od greenwichského poledníku jako *západní zeměpisná délka* (z. d.).

Poloha každého bodu na Zemi (s výjimkou pólů) je tedy jednoznačně určena jeho zeměpisnou šířkou φ a zeměpisnou délkou θ . Dohromady je nazýváme *zeměpisné souřadnice*.

2.6 STANOVENÍ VZDÁLENOSTÍ NA ZEMI

Výpočty vzdáleností na Zemi závisí na způsobu uvažované aproximace. Budeme tedy po naší aproximaci vycházet z předpokladu, že Země je koule.

Nejkratší spojnici dvou různých bodů na sféře je kratší oblouk hlavní kružnice, které se také říká *ortodroma*. Obecně lze výpočet nejkratší vzdálenosti bodů $A[\varphi_A, \theta_A]$ a $B[\varphi_B, \theta_B]$ převést na řešení sférického trojúhelníku, jehož třetí bod je představován severním pólem P_S . Kratšímu oblouku ortodromy odpovídá strana c trojúhelníku ABP_S , kterou lze stanovit pomocí (22). Hlavní kružnice procházející body AP_S (BP_S) jsou vlastně poledníky, takže strany trojúhelníku a, b jsou doplňkem zeměpisné šířky bodů A, B do 90° , tedy: $a = 90^\circ - \varphi_B$, $b = 90^\circ - \varphi_A$. Úhel γ při vrcholu P_S je pak úhel sevřený oběma zmíněnými poledníky, tj. $\gamma = \Delta\theta = \theta_B - \theta_A$. Po dosazení do (22) tedy dostaneme:

$$\cos c = \cos(90^\circ - \varphi_B) \cos(90^\circ - \varphi_A) + \sin(90^\circ - \varphi_B) \sin(90^\circ - \varphi_A) \cos \Delta\theta. \quad (19)$$

Vypočítanou hodnotu c ve stupních převedeme na délkové jednotky a dostaneme délku kratšího oblouku ortodromy d :

$$d = r_Z \frac{c^\circ}{\rho^\circ}. \quad (20)$$

KAPITOLA 3

VORONÉHO DIAGRAM NA SFÉŘE

Doteď jsme si popisovali, co je to Voroného diagram v rovině, jeho vlastnosti a jak vypadá jeho konstrukce v rovině. Uvedli jsme také potřebné základy ke sférické geometrii, kterou potřebujeme, jelikož naším cílem je zkonstruovat Voroného diagram na sférickém modelu Země. Nyní si tedy podrobně popíšeme Voroného diagram a jeho konstrukci na sféře. Obrázky v následující kapitole jsou převzaty z [19].

Nejdříve bych pro ujasnění shrnul, co jsme se prozatím dozvěděli o Voroného diagramech. Voroného diagram přiřazuje diskrétní množině bodů, nazývaných generující body, oblasti prostoru, nazývané buňky, pro které platí, že všechny body uvnitř buňky přiřazené danému generujícímu bodu leží blíže k tomu danému generujícímu bodu, než k některému dalšímu. Ve 2D je Voroného diagram složen z polygonů (mnohoúhelníků), z nichž každý obsahuje svůj generující bod. Hrany Voroného buněk jsou bisektory bodů příslušných těmto buňkám, skládají se tedy z bodů, které jsou stejně vzdálené od právě dvou generujících bodů. Vrcholy Voroného buněk jsou průsečíky jejich hran, skládají se tedy z bodů stejně vzdálených od tří a více generujících bodů. Voroného diagram nám znázorňuje generující body a hranice jejich buněk. Rozšíření do vyšších dimenzí je zřejmé: ve 3D jsou Voroného buňky mnohostěny.

V rovině existuje jednoduchý algoritmus pro vytvoření Voroného diagramu, který spočítá průsečíky bisektorů příslušných generujícímu bodu p_i a všech ostatních p_j , $i \neq j$. Zabere ale $O(n^2 \log n)$ času. Existují ovšem i algoritmy, které Voroného diagram dokážou spočítat efektivněji. Z nich jsme vybrali Fortunův algoritmus, který pro konstrukci diagramu využívá zametací přímku a generuje paraboly určené generujícími body a zametací přímkou (generující bod je ohnisko paraboly, zametací přímka je řídící přímka). Průsečíky sousedících parabol na příbojové vlně určují hrany Voroného diagramu.

V této kapitole si ukážeme, že Fortunův algoritmus pro konstrukci Voroného diagramu lze provést i na jiných varietách, než v rovině: v našem případě na sféře. Struktura algoritmu je velice podobná tomu v rovině, ale s několika rozdíly. Odlišně se např. definuje vzdálenost dvou bodů, ale díky topologii sféry zde vyvstane více nových rysů. Hned si můžeme všimnout, že na rozdíl od roviny je sféra konečná plocha.

3.1 DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Pro úplnost je třeba doplnit, že pojmem body na sféře zde rozumíme vlastně jednotkové vektory, jejichž počáteční bod umístíme do počátku soustavy souřadnic a koncový bod na sféru. Jejich koncový bod můžeme tedy interpretovat bodem jako takovým.

Každá sféra může být v měřítku zvětšována, zmenšována a posouvána. V dalším budeme uvažovat jen *jednotkovou sféru*, jejíž střed je umístěn v počátku soustavy souřadnic. Značíme ji jako

$$S^2 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3: \|\mathbf{p}\|_2 = 1\}, \quad (21)$$

kde $\|\cdot\|_2$ je *euklidovská vzdálenost*. Vzdálenost mezi libovolnými dvěma body \mathbf{p} a \mathbf{q} na sféře budeme značit $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, a platí

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \arccos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}). \quad (22)$$

Jak jsme uvedli dříve, je to délka kratšího oblouku ortodromy procházející body \mathbf{p} a \mathbf{q} , které jsou jeho koncovými body. Oblast $H \subset S^2$ je konvexní, pokud kratší oblouk ortodromy spojující libovolné dva body v H je obsažen v H .

Řekli jsme si, že množinu generujících bodů budeme značit $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$, tentokrát jsou to body na sféře. Voroného diagram pro n bodů množiny P značíme $Vor(P)$, Voroného buňku pro generující bod \mathbf{p}_i , tj. množinu bodů, které leží blíže ke generujícímu bodu \mathbf{p}_i , než k nějakému dalšímu generujícímu bodu, značíme $V(\mathbf{p}_i)$. Platí tedy:

$$V(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{r} \in S^2: d(\mathbf{r}, \mathbf{p}_i) < d(\mathbf{r}, \mathbf{p}_j), \forall j \neq i\}. \quad (23)$$

Bisektor B_{ij} je množina bodů stejně vzdálených ke dvěma generujícím bodům \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_j :

$$B_{ij} = \{\mathbf{r} \in S^2: d(\mathbf{r}, \mathbf{p}_i) = d(\mathbf{r}, \mathbf{p}_j)\}. \quad (24)$$

V rovině je bisektor dvou bodů přímka. Na sféře je to hlavní kružnice, která sféru rozděluje na dvě polokoule, každá přísluší svému bodu. Každá Voroného buňka $V(\mathbf{p}_i)$ je *uzavřená konvexní oblast* na sféře, tvořena průnikem nanejvýš $n - 1$ bisektorů. Voroného hrana E_{ij} mezi generujícími body \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_j je průnik B_{ij} s hranicí Voroného buňky:

$$E_{ij} = \partial V(\mathbf{p}_i) \cap B_{ij} = \partial V(\mathbf{p}_j) \cap B_{ij}. \quad (25)$$

Všechny hrany Voroného diagramu jsou tedy kruhové oblouky, části hlavních kružnic. Voroného vrchol $\mathbf{v}_{ij\dots k}$ příslušný generujícím bodům $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_k$ je bod na hranici Voroného buňky stejně vzdálený od všech těchto generujících bodů:

$$\mathbf{v}_{ij\dots k} = \{\mathbf{r} \in \partial V(\mathbf{p}_i): d(\mathbf{r}, \mathbf{p}_i) = d(\mathbf{r}, \mathbf{p}_j) = \dots = d(\mathbf{r}, \mathbf{p}_k)\}. \quad (26)$$

Obecně vrcholy jedné Voroného buňky neleží v rovině.

V případě, že všechny generující body leží na jedné hlavní kružnici (analogie s rovinou, kdy všechny generující body leží na jedné přímce) je Voroného diagram tvořen $n - 1$ hlavními kružnicemi, kde každá hlavní kružnice je bisektor dvou sousedících bodů. Pro názornost si můžeme představit, že všechny generující body leží na rovníku. Potom je Voroného diagram pro tuto množinu bodů tvořen zřejmě poledníky. V obecném případě, kdy všechny generující body neleží na jedné hlavní kružnici, můžeme analogicky, jako tomu bylo v rovině, pomocí Eulerovy formule pro konvexní mnohostrany s v vrcholy, e hranami a n stěnami dokázat maximální počet vrcholů a hran Voroného diagramu na sféře. Počet stěn n nahradíme počtem buněk, a dojdeme k závěru, že nejvyšší počet vrcholů Voroného diagramu na sféře je $2n - 4$ a nejvyšší počet hran diagramu je $3n - 6$. Odvození tohoto tvrzení najdeme v [19].

Kružnice na sféře, která prochází třemi generujícími body $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k$, je průnik roviny určené těmito třemi body se sférou. Střed této kružnice definujeme tak, aby ležel na sféře a aby byl stejně vzdálený od všech tří bodů. Je to tedy průsečík libovolných dvou bisektorů těchto bodů, ze tří možných. Průsečík \mathbf{v}_{ij}^{kj} dvou bisektorů B_{ij} a B_{kj} leží na obou hlavních kružnicích, tudíž je kolmý k oběma jejich normálám a získáme ho normalizovaným vektorovým součinem těchto normál k daným hlavním kružnicím:

$$\mathbf{v}_{ij}^{kj} = \pm \frac{(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \times (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j)}{|(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \times (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j)|}. \quad (27)$$

Takové průsečíky jsou dva. Kdyby jedním z nich procházela zemská osa, druhý bude ležet na jejím opačném konci. Střed naší kružnice tedy leží v průniku bisektorů těchto bodů, a její poloměr vypočítáme jako:

$$r = d(\mathbf{v}_{ij}^{kj}, \mathbf{p}_i) = \arccos(\mathbf{v}_{ij}^{kj} \cdot \mathbf{p}_i). \quad (28)$$

Tento poloměr závisí na výběru středu \mathbf{v}_{ij}^{kj} a může být větší než $\frac{\pi}{2}$. Výběr správného středu pro dané tři body si vysvětlíme později, až budeme mluvit o algoritmu konstrukce diagramu. Stejně jako v rovinném případě platí, že ve Voroného diagramu $Vor(P)$ je střed kružnice \mathbf{v}_{ij}^{kj} vrchol Voroného diagramu tehdy a jen tehdy, když je tato kružnice prázdná, tedy když ve svém vnitřku neobsahuje žádné další generující body. Vnitřek kružnice definujeme jako část sféry, která vznikne řezem sféry rovinou určenou danými třemi body, obsahující střed kružnice \mathbf{v}_{ij}^{kj} .

3.2 KONSTRUKCE VORONÉHO DIAGRAMU

3.2.1 Fortunův algoritmus

Fortunův algoritmus pro konstrukci Voroného diagramu jsme si vysvětlili v rovině, nyní si ukážeme, jak ho modifikovat, abychom ho mohli použít i na sféře.

Jak víme, Fortunův algoritmus v rovině je založen na metodě *zametací přímky*. Musíme si uvědomit, že sféra není na rozdíl od roviny nekonečná, takže pod pojmem *přímka* budeme na sféře rozumět *vedlejší kružnici*, která vznikne řezem roviny se sférou. Zametací přímka tedy zůstane zametací přímka, nebudeme jí říkat zametací kružnice, nebo nějak podobně. Zametací přímka na sféře je tedy uzavřená křivka, na rozdíl od roviny. Řekli jsme si, že hrany Voroného diagramu mají tu vlastnost, že obsahují body, jež jsou stejně vzdálené od dvou generujících bodů.

Nechť l je vedlejší kružnice a \mathbf{p} bod na sféře. *Parabola* β je množina všech bodů sféry, které mají stejnou vzdálenost od l a \mathbf{p} .

Jestliže tedy definujeme parabolu β_i jako množinu bodů stejně vzdálených od bodu \mathbf{p}_i a od přímky (v KSS kružnice), kterou značíme l , a parabolu β_j jako množinu bodů stejně vzdálených od bodu \mathbf{p}_j a od přímky l , potom průsečík parabol β_i a β_j je stejně vzdálen od bodů \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_j . Po této modifikaci budeme postupovat obdobně jako v rovině.

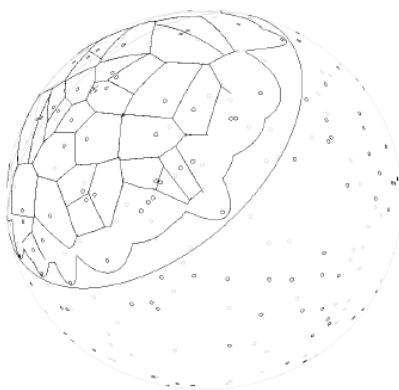
Definujeme zametací přímku l na sféře jako průnik roviny (zametací roviny) se sférou. Normála zametací roviny je \mathbf{n} . Bod určený normálou \mathbf{n} budeme nazývat *severní pól*. Protějš

bod na sféře k severnímu pólu bude *jižní pól*. Zametací přímka l je charakterizována normálou \mathbf{n} a parametrem ξ tak, že platí:

$$l(\mathbf{n}, \xi) = \{\mathbf{r}: \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \cos \xi\}. \quad (29)$$

V průběhu algoritmu přímka „zametá“ sféru následovně. Nejdříve od severního pólu ($\xi = 0$) k jižnímu ($\xi = \pi$), a poté od jižního pólu ($\xi = \pi$) k severnímu ($\xi = 2\pi$). Můžeme si představit, že pro $\xi > \pi$ je zametací přímka jakoby uvnitř sféry.

Každý generující bod \mathbf{p}_i nad zametací přímkou, nebo-li severně od ní, určuje parabolu β_i . Generující bod je ohnisko paraboly, zametací přímka její řídící přímka. Spodní hranici všech těchto parabol určených generujícími body nad l (pro $\xi \leq \pi$) nazýváme opět *příbojová vlna*. Všechny body sféry ležící nad příbojovou vlnou jsou blíže k nějakému generujícímu bodu $\mathbf{p}_i \in P$, než k zametací přímce, tudíž jejich nejbližší generující bod určitě neleží pod ní. Navíc část Voroného diagramu pro body nad l už je určena, takže zbývá určit zbývající část Voroného diagramu ležící pod l . Průsečíky dvou sousedících parabol na příbojové vlně jsou stejně vzdáleny od dvou generujících bodů, které tyto paraboly určují, a musí tedy ležet na hranách Voroného diagramu. Zametací přímka je tvořena body se stejnou zeměpisnou šířkou, je tedy rovnoběžka. Každá hlavní kružnice procházející severním pólem ji protíná právě ve dvou bodech.



Obr. 11: Příbojová vlna na sféře

Nyní si vysvětlíme další rozdíl mezi konstrukcí v rovině a na sféře. Jak jsme řekli, rovina je nekonečná, pro určení diagramu tedy můžeme nekonečně „zametát“ zametací přímkou. V praxi samozřejmě nekonečně „zametát“ nemůžeme, pro dokončení diagramu v rovině se proto vytvoří čtvercový nebo obdélníkový rámeček, který ve svém vnitřku obsahuje všechny generující body a Voroného diagram pro tyto body se konstruuje jen uvnitř rámečku. Sféra má ovšem konečný povrch. Mohlo by se zdát, že stačí, když zametací přímka dosáhne jižního pólu. To ale není pravda, když se tak stane, diagram ještě není hotov. Ačkoli už byly projity všechny generující body, které se nyní nachází nad příbojovou vlnou, zůstává nám ještě oblast pod ní, kterou jsme nevzali v úvahu. Proto pokračujeme a „zametáme“ sféru směrem nahoru (vnitřním povrchem sféry), kdy $\xi > \pi$, dokud není diagram hotov.

3.2.2 Paraboly na sféře

Nyní si odvodíme rovnici paraboly na sféře. Využijeme toho, že parabola β je množina bodů \mathbf{q} , které jsou stejně vzdáleny, v zeměpisném slova smyslu, od bodu \mathbf{p} a od přímky l na sféře. Zametací přímku značíme jako množinu bodů \mathbf{r} :

$$l(\mathbf{n}, \xi) = \{\mathbf{r}: \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \cos \xi = c\}. \quad (30)$$

Body \mathbf{q} na parabole jsou definovány vztahem

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d(\mathbf{R}, \mathbf{q}), \quad (31)$$

nebo

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}, \quad (32)$$

kde \mathbf{R} je bod na zametací přímce, který je nejbližší ke \mathbf{q} . Z toho vyplývá, že $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = c$, a navíc, že $\mathbf{R} = \mu \mathbf{n} + \nu \mathbf{q}$ pro vhodné μ a ν . Po skalárním vynásobení posledního vztahu jednak \mathbf{R} , jednak \mathbf{n} dostaneme

$$1 = \mu c + \nu(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \quad (33)$$

a

$$c = \mu + \nu(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}). \quad (34)$$

Máme tedy dvě rovnice pro dvě neznámé μ a ν . Jejich řešením dostáváme

$$\mu = \frac{c(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - c(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})}, \quad (35)$$

a

$$\nu = \frac{1 - c^2}{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - c(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})}. \quad (36)$$

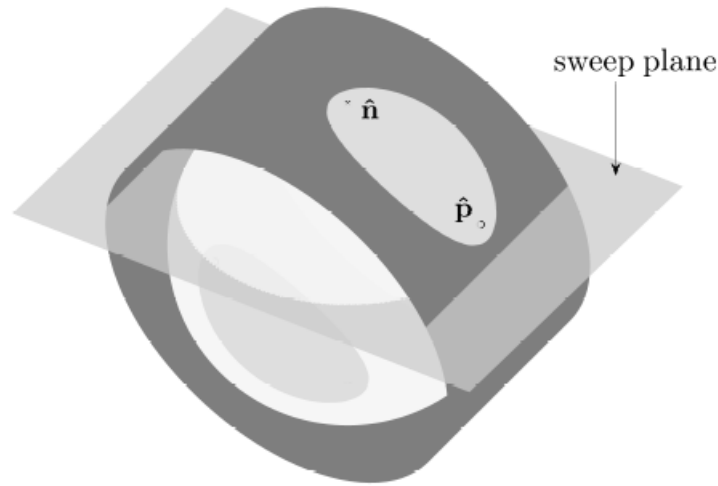
Když porovnáme vzdálenosti od \mathbf{q} k \mathbf{p} a k \mathbf{R} , dostaneme

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \mu(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) + \nu. \quad (37)$$

Po dosazení za μ a ν a po úpravě dostaneme

$$\frac{(\mathbf{q} \cdot (\mathbf{n} + \mathbf{p}))^2}{2(1+c)} + \frac{(\mathbf{q} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{p}))^2}{2(1-c)} = 1. \quad (38)$$

Tímto řešením jsme dostali rovnici paraboly na sféře. Je zajímavé, že parabola je zároveň elipsa a hyperbola na sféře. Více se o tom můžeme dozvědět v [17]. Z rovnice (38) můžeme vidět, že geometrické místo bodů \mathbf{q} na sféře, stejně vzdálené od bodu \mathbf{p} a od přímky (kružnice) určené vztahem $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = c$, je průnik sféry a eliptického válce. Osa válce je ve směru kolmém na vektory \mathbf{n} a \mathbf{p} , tedy ve směru $\mathbf{n} \times \mathbf{p}$, a hlavní a vedlejší osa elipsy jsou ve směrech $\mathbf{n} + \mathbf{p}$ a $\mathbf{n} - \mathbf{p}$, a mají velikost $\sqrt{\frac{1+c}{1+\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}}$ a $\sqrt{\frac{1-c}{1-\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}}$.



Obr. 12: Průnik eliptického válce a sféry

Protože jedna z os je vždy větší než 1, zatímco druhá menší než 1, každá parabola na sféře se skládá ze dvou uzavřených křivek. Protože rovnice (38) je pro \mathbf{q} sudá fce, jedna křivka je inverzní k druhé. Abychom tyto dvě křivky odlišili, musíme si uvědomit, že zametací přímka dělí sféru na dvě části a že jedna z křivek leží celá v té části sféry, která obsahuje příslušný generující bod (ohnisko). Tuto křivku budeme tedy nazývat *parabolou*, zatímco druhou křivku *inverzní parabolou*.

Na sféře je vzdálenost mezi bodem \mathbf{q} na parabole a zametací přímkou $l(\mathbf{n}, \xi)$

$$d(\mathbf{q}, l) = \xi - \arccos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}), \quad (39)$$

pro $0 < \xi < 2\pi$. Pro $\xi > \pi$ je leží nejkratší cesta mezi bodem \mathbf{q} a zametací přímkou l částečně, pro naši představu, na vnitřním povrchu sféry. Bod \mathbf{q} na parabole β tedy splňuje

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \cos(\xi - \arccos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})). \quad (40)$$

Dále, když použijeme sférické souřadnice φ a θ s tím, že $r = 1$ a úhel φ zde nereprezentuje zeměpisnou šířku, ale odpadání od osy z ($\varphi = 0$ pro severní pól, $\varphi = \pi$ pro jižní pól). Říkejme mu *polární úhel* bodu na sféře.

$$\begin{aligned} x &= \sin \varphi \cos \theta, \\ y &= \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= \cos \varphi, \end{aligned} \quad (41)$$

a položíme $\mathbf{n} \equiv \mathbf{z}$, potom můžeme rovnici (40) vyřešit takto:

$$\tan \varphi = \frac{\cos \xi - \cos \varphi_p}{\sin \varphi_p \cos(\theta - \theta_p) - \sin \xi}, \quad (42)$$

kde φ_p a θ_p symbolizují polohu generujícího bodu \mathbf{p} a φ , θ polohu bodu na parabole. Parabola na sféře je uzavřená křivka, protože pro každou hodnotu θ a $\theta + 2n\pi$ existuje jediné φ .

Dvě paraboly příslušné generujícím bodům, které leží na stejné straně od zametací přímky, se protínají ve dvou bodech, které můžeme jednoznačně určit pomocí jejich úhlu φ_{int} , který určíme takto:

$$\sin(\varphi_{int} + \gamma) = \pm \frac{\xi}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (43)$$

kde

$$a = (\cos \xi - \cos \varphi_j) \sin \varphi_i \cos \theta_i - (\cos \xi - \cos \varphi_i) \sin \varphi_j \cos \theta_j,$$

$$b = (\cos \xi - \cos \varphi_j) \sin \varphi_i \sin \theta_i - (\cos \xi - \cos \varphi_i) \sin \varphi_j \sin \theta_j,$$

$$\xi = (\cos \varphi_i - \cos \varphi_j) \sin \xi,$$

$$\sin \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (44)$$

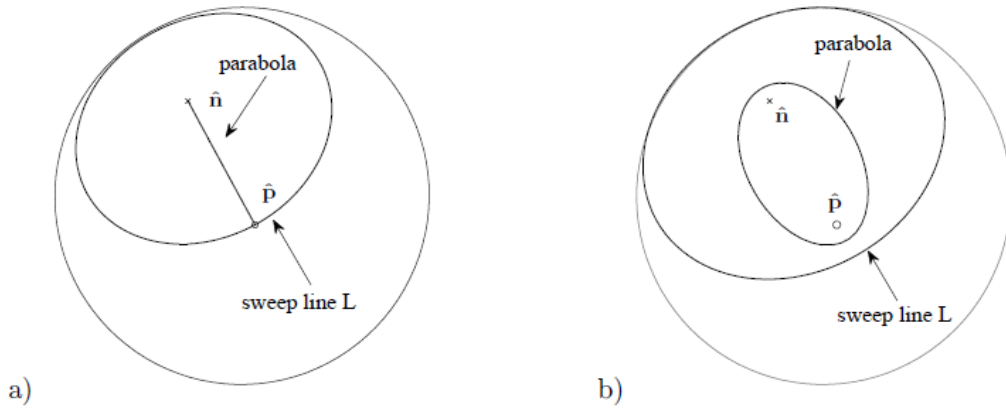
kde φ_i , θ_i a φ_j , θ_j symbolizují polohu generujících bodů \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_j . V rovnici (43) vybereme znaménko plus, jestliže při pohybu po příbojové vlně proti směru hodinových ručiček narazíme dříve na generující bod \mathbf{p}_i .

Nyní se podíváme blíže na příbojovou vlnu a události, při kterých se mění její struktura. Ta se mění při vzniku nových parabolických oblouků a při zániku již stávajících oblouků v momentech, kdy zametací přímka narazí na určitý bod. Průchod zametací přímky těmito body jsme nazvali *události*. Stejně jako v rovinném případě máme i na sféře dva druhy událostí. Je to *bodová událost* a *kruhová událost*. Jak jsme řekli dříve, v algoritmu „skáčeme“ z jedné události na druhou a ignorujeme všechny přechodné pozice.

Bodová událost nastává tehdy, když zametací přímka narazí na nový generující bod a na příbojové vlně se objeví nový parabolický oblouk. Nejprve je to degenerovaná parabola, tzn. část hlavní kružnice procházející jejím generujícím bodem \mathbf{p} a severním pólem \mathbf{n} . S postupem zametací přímky dále se parabola rozšiřuje. Při bodové události se tedy na příbojové vlně objeví dva nové průsečíky, které nejdřív splývají, a poté se od sebe vzdalují a určují tím stejnou hranu diagramu.

Jednoduše lze ukázat, že příbojová vlna je na sféře tvořena nanejvýš $2n - 2$ parabolickými oblouky. Každá bodová událost rozdělí nanejvýš jeden parabolický oblouk na 2 a jinak se na příbojové vlně nemůže nový parabolický oblouk objevit. V rovině to bylo $2n - 1$ parabolických oblouků. Zde je o jeden oblouk méně, protože druhý generující bod jen přidá jeden parabolický oblouk, protože příbojová vlna je uzavřená křivka.

Všechny bodové události známe tedy už předem. Kdy nastanou, určíme po seřazení generujících bodů podle jejich polárního úhlu. V případě, že se polární úhel u dvou z nich shoduje, seřadíme tyto podle zeměpisné délky.

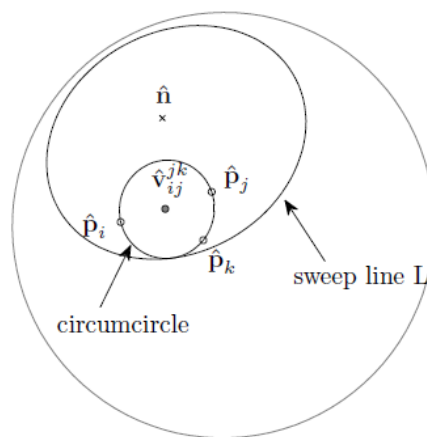


Obr. 13: a) Degenerovaná parabola na sféře, b) Parabola určená \mathbf{p} a l

O *kruhové události* hovoříme v případě, že se stávající parabolický oblouk na příbojové vlně smrskne do bodu a zmizí. V okamžiku smrštění na bod je tento bod stejně vzdálen alespoň od tří generujících bodů a od zametací přímky, je to tudíž vrchol Voroného diagramu. Kruhové události nám nejsou známy předem, musíme je detekovat dynamicky v průběhu algoritmu. Pro každou po sobě jdoucí trojici bodů \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_j a \mathbf{p}_k je nutno spočítat střed jimi tvořené prázdné kružnice. Dříve jsme řekli, že tyto středy jsou dva. Střed \mathbf{v}_{ij}^{kj} jako na Obr. 14 je zvolen v případě, že body \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_j a \mathbf{p}_k jsou uspořádány po směru hodinových ručiček, když se ze zmíněného středu díváme do středu sféry. Odpovídá mu znaménko plus v rovnici (27). Pozice zametací přímky v momentě, kdy nastane kruhová událost, je dána polárním úhlem nejnižšího bodu na kružnici:

$$\varphi_{kružnice} = \arccos(\mathbf{v}_{ij}^{kj} \cdot \mathbf{n}) + \arccos(\mathbf{v}_{ij}^{kj} \cdot \mathbf{p}_i). \quad (45)$$

Kruhová událost je poté vytvořena jen tehdy, když nejnižší bod kružnice leží pod zametací přímkou l , tj. když $\varphi_{kružnice} > \xi$.



Obr. 14: Kruhová událost

I když polární úhel středu prázdné kružnice je vždy menší nebo roven π , pozice odpovídající kruhové události může mít polární úhel větší než π . Abychom na takovéto kruhové události nezapomněli, zametací přímka l se musí pohybovat také „uvnitř“ sféry, od

spodu nahoru, jak jsme zmiňovali dříve. Příbojová vlna ale zůstává na vnějším povrchu sféry. Dovnitř už se nedostane, protože při každé kruhové události zmizí příslušný parabolický oblouk v místě středu prázdné kružnice, a ty se všechny nacházejí na vnějším povrchu sféry. Algoritmus se zastaví, když na příbojové vlně zůstanou už pouze dva parabolické oblouky. Potom už totiž nemohou vzniknout žádné kruhové události a všechny vrcholy diagramu a příslušné generující body už byly projity. Dva průsečíky, ve kterých se dva zbývající parabolické oblouky protínají, se nakonec spojí ve vrcholu, který už byl do diagramu zapracován. V tomto bodě je tedy Voroného diagram hotov.

3.2.3 Datové struktury

Datové struktury používáme k ukládání dat během průchodu algoritmem.

Kruhové a bodové události jsou ukládány ve dvou rozdílných *prioritních frontách*. Všechny události jsou seřazeny podle polárních úhlů od nejmenšího k největšímu, v případě shodných polárních úhlů podle zeměpisné délky od nejmenší k největší. U bodových událostí jednoduše ukládáme pozici generujícího bodu. U kruhových událostí ukládáme jejich nejnižší bod a střed prázdné kružnice, s ukazatelem na příbojovou vlnu, která reprezentuje mizející parabolický oblouk.

Příbojovou vlnu reprezentujeme vyváženým *binárním vyhledávacím stromem*. Binární vyhledávací strom je struktura založená na binárním stromu, v němž jsou jednotlivé prvky (uzly) uspořádány tak, aby v tomto stromu bylo možné rychle vyhledávat danou hodnotu. Strom se skládá z uzlů a listů. Každý uzel má nanejvýš dva syny: levého a pravého. Každému uzlu je přiřazen určitý klíč, podle kterého jsou uzly uspořádány. V našem případě je to zeměpisná délka. Levý podstrom uzlu obsahuje pouze klíče menší než je klíč daného uzlu, pravý obsahuje pouze klíče větší. Koncové uzly, které nemají žádné potomky, jsou listy. V našem případě odpovídají listy jednotlivým parabolám na příbojové vlně. Jsou seřazeny podle zeměpisné délky. Paraboly jsou ve stromě reprezentovány svým ohniskem. Každý list obsahuje generující bod, který určuje odpovídající parabolu. Vnitřní uzly stromu reprezentují průniky parabolických oblouků na příbojové vlně. Každý průnik je ukládán jako uspořádaná dvojice bodů $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle$, kde \mathbf{p}_i určuje parabolu nalevo od průniku (s menší zeměpisnou délkou) a \mathbf{p}_j parabolu napravo od průniku. V našem stromu také ukládáme ukazatele k ostatním strukturám algoritmu. Každý list stromu, reprezentující oblouk β , obsahuje ukazatel na uzel prioritní fronty, který reprezentuje kruhovou událost, ve které β zaniká. Každý uzel stromu také obsahuje ukazatel na hranu ve dvojité souvislém seznamu, viz níže, která obsahuje bod průniku těchto parabol.

Částečný Voroného diagram ukládáme do dvojité souvislého seznamu. V něm jsou hrany Voroného diagramu reprezentovány polohranami. Každá polohrana je reprezentována svým počátečním bodem, buňkou příslušnou této hraně, navazujícími polohranami a jejím dvojčetem v sousední buňce.

3.2.4 Algoritmus

Fortunův algoritmus simuluje růst postupující příbojové vlny se zametací přímkou pohybující se nejdříve vněškem sféry dolů, poté vnitřkem zpět nahoru. Příbojová vlna v průběhu algoritmu mění svoji strukturu. Jak jsme ale zmínili dříve, my se budeme zabývat jen *diskrétními událostmi*, kdy nastávají změny v její struktuře, a všechny kroky mezitím přeskočíme. Nyní si ukážeme *pseudokód* tohoto algoritmu (viz [19]).

Vstup: Množina $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ n různých bodů na sféře.

Výstup: Voroného diagram $\text{Vor}(P)$ dán dvojité souvislým seznamem.

1. Seřaď generující body v P a umísti je do fronty událostí Q_{bod} ; Inicializuj prázdnou frontu událostí $Q_{kružnice}$, prázdný binární vyhledávací strom T a prázdný dvojité souvislý seznam D .
2. **While** Q_{bod} nebo $Q_{kružnice}$ je neprázdná
3. **if** Q_{bod} je neprázdná a generující bod p_i je před událostmi v $Q_{kružnice}$
4. **then** $\text{UmístiParabolu}(p_i)$, a odstraň odpovídající uzel z Q_{bod}
5. **else** $\text{OdstraňParabolu}(p_i)$, a odstraň list reprezentující parabolu, která průchodem tímto kruhovým bodem zaniká.
6. Spoj polohrany dvojité souvislého seznamu pro dokončení diagramu.

Procedury, podle kterých se postupuje při událostech, jsou popsány zde.

$\text{UmístiParabolu}(p_i)$

1. **If** T je prázdný
2. **then** vlož p_i do T
3. **else** najdi v T list reprezentující parabolu β určenou bodem p_i .
4. **if** list reprezentující parabolu β obsahuje odkaz na kruhovou událost
5. **then** vymaž tuto událost z fronty $Q_{kružnice}$
6. Nahraď ve stromu T list reprezentující parabolu β podstromem se třemi listy. Prostřední list bude reprezentovat nově vzniklou parabolu určenou bodem p_i , levý a pravý bude reprezentovat parabolu určenou bodem p_j , kde p_j je bod určující parabolu, kterou nová parabola protne. V uzlech budou uloženy body průniku těchto dvou parabol $\langle p_j, p_i \rangle$ a $\langle p_i, p_j \rangle$.
7. Vytvoř záznam pro hrany do dvojité souvislého seznamu D , které budou vytvářeny průsečíky daných dvou parabol.
8. Zkontroluj trojice sousedících parabolických oblouků, zda neurčují kruhovou událost. Jestli ano, přidej tuto událost do fronty $Q_{kružnice}$ a k listu reprezentujícímu nově vzniklou parabolu přidej ukazatel na tuto událost.

$\text{OdstraňParabolu}(p_i)$

1. Vymaž z fronty $Q_{kružnice}$ všechny události, které jsou tvořené pomocí zaniklé paraboly.
2. Vytvoř záznam pro vrchol do dvojité souvislého seznamu D . Nově vzniklým vrcholem je střed kružnice, kterou určuje kruhová událost. Vytvoř záznamy pro hrany v seznamu, které jsou určeny novými průsečíky parabol. Uprav záznamy tří hran, které se setkávají ve vzniklém vrcholu.
3. Zkontroluj, zda zánikem paraboly nevznikla trojice bodů vytvářející novou kruhovou událost. Jestli ano, přidej ji do fronty $Q_{kružnice}$ a k příslušnému listu přidej odkaz na tento bod.

3.2.5 Problémové případy

V průběhu algoritmu mohou vzniknout některé problémové případy, kterými jsme se nezabývali. Nyní si je tedy ukážeme.

První z nich nastává, když dva nebo více generujících bodů mají stejný polární úhel. Toto ošetříme jejich seřazením podle zeměpisné délky. V případě, že se tak ale stane na začátku algoritmu, tzn. pro body \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 , musíme tomuto věnovat pozornost, protože nad bodem \mathbf{p}_2 ještě nebude žádný parabolický oblouk na příbojové vlně. Zde je parabolický oblouk určený \mathbf{p}_2 jednoduše přidán k příbojové vlně, která je zde jen parabola určená \mathbf{p}_1 . Tyto dva parabolické oblouky se protínají na severním pólu. Je vytvořen nový vrchol a dva nové záznamy pro polohrany.

Druhý případ nastává, když splývají buď dvě kruhové události, nebo kruhová a bodová událost. Toto odpovídá případu, kdy jsou 4 a více generující body stejně vzdáleny od určitého bodu na sféře. Tohle se např. může stát, když jsou generující body uspořádány v kruzích. V takových případech ale není třeba nic zvláštního dělat, události jsou zpracovány postupně v pořadí. Tedy místo vrcholu stupně např. čtyři budeme mít dva vrcholy stupně tři spojené hranou nulové délky.

Problém může také nastat u bodové události v případě, že nový parabolický oblouk zpočátku protíná dva různé oblouky současně. V takovém případě není jeden oblouk rozdělen do dvou, namísto toho vytvoříme vrchol v místě průsečíku těchto dvou parabolických oblouků a vytvoříme tři nové záznamy pro polohrany tří příslušných buněk.

KAPITOLA 4

GOOGLE MAPS API

Jak jsme zmínili dříve, naším cílem bylo zkonstruovat Voroného diagram tak, aby se dal zobrazit na zemském povrchu. Zemský povrch jsme aproximovali sférou a řekli jsme si, jak zkonstruovat Voroného diagram na sféře. Nyní tedy nastává závěrečná část naší práce, a sice samotné zobrazení mapy na zemském povrchu. K tomuto účelu jsme vybrali mapy od společnosti Google, která nabízí tzv. Google Maps API. API = „Application Programming Interface“ označuje rozhraní pro programování aplikací. Takto můžeme vytvářet např. mobilní aplikace, které využívají mapy Google, vizualizovat si různá geodata, upravovat svoje mapy atd. Pro náš účel je vhodné použít Google Maps JavaScript API, takto můžeme pomocí JavaScriptu vložit interaktivní Google mapy na svoje stránky (takové, jak je známe z <http://maps.google.com>) a dále je různě upravovat.

Momentálně se používá nová verze 3 tohoto API, která by měla být rychlejší a vhodnější jak pro mobilní zařízení, tak pro tradiční aplikace v prohlížečích na PC, než starší verze. Google Maps JavaScript API poskytuje mnoho pomůcek pro úpravu map a pro přidání různých obsahů na svoje mapy a tím nabízí možnost vytvoření různých mapových aplikací na vlastních stránkách.

Tato služba je zadarmo a lze libovolně použít s tím, že stránka, kde je mapa umístěna, musí být volně přístupná všem návštěvníkům, nesmí jít tedy o stránku, kde je k prohlížení obsahu nutná registrace/přihlášení.

Pro používání Google Maps API stačí základní znalost JavaScriptu a základy objektově orientovaného programování. Také je vhodné znát Google mapy z uživatelského pohledu. Před samotným použitím Google Maps API je potřeba získat tzv. API klíč. Používáním tohoto klíče je možné sledovat aktivitu na vašich stránkách, a taky Vás jeho prostřednictvím v případě nějakých problémů může společnost Google kontaktovat. Klíč lze zdarma získat na stránkách společnosti Google. Podmínkou je mít účet u Google (Google account), ten je také zdarma. Klíč je vytvořen po odsouhlasení podmínek použití.

Podrobný návod, jak Google mapu na svoje stránky vložit a jak s ní dále pracovat najdeme na <https://developers.google.com/maps/>.

ZÁVĚR

Cílem práce byla snaha přenést konstrukci Voroného diagramu na zemský povrch. Postupovali jsme po krocích. V první kapitole jsme uvedli základní informace o Voroného diagramu, k čemu je užitečný a podobně. Definovali jsme Voroného diagram pro množinu bodů v rovině a uvedli si jeho základní vlastnosti. Ukázali jsme také jeho konstrukci pomocí Fortunova algoritmu, který využívá metody zametací přímky. V průběhu zmíněného algoritmu jsou důležité dva typy událostí, bodová a kruhová událost, pomocí nichž získáváme informace o poloze hran a vrcholů Voroného diagramu.

Ve druhé kapitole jsme se zabývali sférickou geometrií, které je třeba pro přenesení konstrukce diagramu na Zemi. Tu jsme aproximovali sférou. Vysvětlili jsme, co je to kulová plocha, hlavní a vedlejší kružnice, uvedli jsme vztahy pro převod pravoúhlých souřadnic do sférických souřadnic, popsali jsme sférický trojúhelník. Zároveň jsme definovali, jak se určuje poloha bodu na Zemi, tedy zeměpisné souřadnice, zeměpisnou šířku a délku, a popsali, jak se stanovuje vzdálenost na Zemi pomocí řešení sférického trojúhelníku.

Ve třetí kapitole jsme se dostali k přenesení Fortunova algoritmu na sféru. Nejprve jsme však definovali Voroného diagram na sféře a jeho základní vlastnosti. Dále jsme popisovali konstrukci Voroného diagramu Fortunovým algoritmem na sféře. Vysvětlili jsme rozdíly s rovinným případem. Hlavní rozdíl tkví v tom, že sféra je konečná plocha, od toho se pak odvíjí další změny. Opět jsme si popsali bodové a kruhové události na sféře a jak ovlivňují konstrukci diagramu. Popsali jsme také datové struktury vhodné při konstruování diagramu Fortunovým algoritmem, a uvedli jsme pseudokód tohoto algoritmu.

Protože k vyobrazení Voroného diagramu využíváme mapy společnosti Google, ve čtvrté kapitole jsme si přiblížili, co je to Google Maps API.

Původním cílem práce měla být internetová stránka s načtenou Google mapou, do které by se po zadání generujících bodů vykreslil Voroného diagram pro danou množinu bodů. Při samotném vytváření tohoto programu podle výše zmíněného pseudoalgoritmu jsem ale narazil na řadu problémů týkajících se zejména reprezentování datových struktur (binární vyhledávací strom, dvojité souvislý seznam) v JavaScriptu, které přesahovaly rámec mých dosavadních programátorských schopností a které jsem nebyl schopen nahradit jinými, jednoduššími. Po každém nahrazení (např. binárního stromu indexovaným polem) se objevily nové problémy, které se nabalovaly na stávající průběh algoritmu a které postupem času nebylo možné zvládat. Počáteční záměr, tedy vytvořit aplikaci pro vykreslení Voroného diagramu na Google mapách, se nezdařil. Všechny potřebné údaje pro vytvoření této aplikace jsou zde nicméně uvedeny, proto může tato práce sloužit alespoň jako návod pro případné zájemce o tuto problematiku.

LITERATURA

- [1] Google Maps API. Google Developers [online]. 2012 [cit. 2012-05-21]. Dostupné z: <https://developers.google.com/maps/>
- [2] Asymptotická složitost. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 2011-11-12 [cit. 2012-05-15]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Asymptotick%C3%A1_slo%C5%BEitost
- [3] JavaScript Voronoi. In: Google Code [online]. [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: <http://code.google.com/p/javascript-voronoi/>
- [4] Voronoi diagram. In: Computational geometry: Rashid Bin Muhammad [online]. [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: <http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Compgeometry/MyCG/CG-Applets/VoroDiagram/vorocli.htm>
- [5] Kuchařky. Korespondenční seminář z programování MMF UK [online]. 2006, 2012 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: <https://ksp.mff.cuni.cz/study/cooks/>
- [6] Fortune's algorithm. In: Wikipedia [online]. 2012 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Fortune%27s_algorithm
- [7] Voronoi diagram. In: Wikipedia [online]. 2012 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram
- [8] Fortunův algoritmus a jeho implementace. In: Ivánkův blog [online]. 2011 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: <http://ivankuckir.blogspot.com/2011/03/fortunuv-algoritmus-jeho-implementace.html>
- [9] Calculate distance, bearing and more between Latitude/Longitude points. In: Movable Type Scripts [online]. 2010 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: <http://www.movable-type.co.uk/scripts/latlong.html>
- [10] Boundary Functions. In: Scott Sona Snibbe [online]. 1998 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: <http://www.snibbe.com/projects/interactive/boundaryfunctions>
- [11] The Voronoi website [online]. 2006 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: http://www.voronoi.com/wiki/index.php?title=Main_Page
- [12] Algorithms for closest point problems: Practice and theory. In: Dartmouth Computer Science Department [online]. 1992 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: <http://www.cs.dartmouth.edu/reports/TR92-185.pdf>
- [13] Javascript implementation of Fortune's algorithm to compute Voronoi diagrams. In: Raymond Hill's blog [online]. 2010 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: <http://www.raymondhill.net/blog/?p=9>
- [14] BERG, Mark de. Computational geometry: algorithms and applications. 3rd ed. Berlin: Springer, c2008, 386 s. ISBN 978-3-642-09681-5.
- [15] BRÁZDIL, Rudolf et al. Úvod do studia planety Země: Učebnice pro vysoké školy. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.

- [16] HLOŽEK, Martin. Sférická geometrie. Plzeň, 2005. Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/work/cd/dp_sferickageo.pdf. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni. Vedoucí práce RNDr. Světlana Tomiczková.
- [17] SYKES, G.S. a B. PEIRCE. Spherical Conics. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. 1877, č. 13. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/25138501>
- [18] TOMŠŮ, Jana. Diagramy Voronoia. Brno, 2008. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce doc. RNDr. Martin Čadek, CSc.
- [19] ZHENG, Xiaoyu. A plane sweep algorithm for the voronoi tessellation of the sphere. In: Electronic-Liquid crystal communications [online]. 2011 [cit. 2012-05-07]. Dostupné z: http://www.e-lc.org/tmp/Xiaoyu__Zheng_2011_12_05_14_35_11.pdf